



Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Guanajuato

Sábado 6 de septiembre | CIMAT Guanajuato

## Quinto examen selectivo, día 2

---

### Problema 4.

Demuestra que para todo número natural  $n$  se tiene que

$$n^2 + 3n + 5$$

no es un múltiplo de 121.

### Problema 5.

Sean  $p$  y  $q$  dos números reales positivos tales que  $p + q = 1$ . Además, sean  $a$  y  $b$  dos números reales cualesquiera. Demuestra que la siguiente desigualdad es siempre verdadera:

$$(pa + qb)^2 \leq pa^2 + qb^2.$$

### Problema 6.

Sean  $ABC$  un triángulo con todos sus ángulos menores a  $90^\circ$  y  $D$  un punto en el segmento  $AB$ . El circuncírculo del triángulo  $BDC$  tiene centro  $O$  y corta al segmento  $AC$  en un punto  $E$ . El circuncírculo del triángulo  $ADE$  y el de  $ABC$  se cortan en un punto  $F$ . Demuestra que  $OF$  y  $AF$  son perpendiculares.

**Definición:** El circuncírculo de un triángulo es la circunferencia que pasa por sus tres vértices.